Aufgabe 9.1 Welche der Aussagen sind wahr? (Hier sind $x, y \in \mathbb{R}$.)

a) $0 < 1 \vee 1 > 2$,

b) $0 > 1 \wedge 1 > 2$,

c) $0 < 1 \implies 1 < 2$,

d) $0 > 1 \implies 1 > 2$,

e) $(\exists x)\ x^2 = 4$,

f) $(\exists! x)\ x^2 = 4$
(es existiert ein <u>eindeutiges</u> x),

g) $(\forall x)\ (\exists y)\ x < y$,

h) $(\exists x)\ (\forall y)\ x < y$,

i) $(\forall x)\ (\exists y)\big[x < 0 \wedge y < 0 \implies xy > 0\big]$.

Aufgabe 9.2 Unter Verwendung der Aussagen

A: "Der Student hat die Lehrveranstaltungen besucht."

B: "Der Student hat gewissenhaft studiert."

C: "Der Student hat die Übungsaufgaben gelöst."

D: "Der Student hat das Examen bestanden."

beschreiben Sie symbolisch:

a) Wenn der Student die Lehrveranstaltungen besucht hat, gewissenhaft studiert hat und die Übungsaufgaben gelöst hat, besteht er das Examen.

b) Wenn der Student die Lehrveranstaltungen besucht hat, aber nicht gewissenhaft studiert hat und die Übungsaufgaben nicht gelöst hat, besteht er das Examen nicht.

c) Der Student besteht das Examen genau dann, wenn er die Lehrveranstaltungen besucht hat, gewissen hat studiert hat und die Übungsaufgaben gelöst hat.

Aufgabe 9.3 Verneinen Sie die Aussagen aus Aufgabe 2. Sorgen Sie dafür, dass in den neuen Aussagen das Zeichen $\neg$ nur vor den "Buchstaben" vorkommt.

Aufgabe 9.4 Beweisen Sie die folgenden Tautologien mithilfe einer Wahrheitstafel.

a) $\big(A \implies \neg A\big) \implies \neg A$,

b) $A \vee \big(B \wedge \neg B\big) \iff \neg A$,

c) $\Big[A \vee \big(B \wedge C\big)\Big] \iff \Big[\big(A \vee B\big) \wedge \big(A \vee C\big)\Big]$,

d) $\Big[\big(A \wedge \neg B\big) \implies \big(C \wedge \neg C\big)\Big] \iff \big(A \implies B\big)$.

Aufgabe 9.5 Sei $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4\}$ und $C = \{1,2,5,6\}$.
Bestimmen Sie $(A \cap B) \cup C$, $(B \cap C) \cup A$, $(C \cap A) \cup B$, $A \cap (B \cup C)$, $B \cap (C \cup A)$, $C \cap (A \cup B)$.

Beispiel. Wir bezeichnen $\underline{n} := \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Es gilt

$$\underline{3} \subset \underline{5}, \quad 3 \in \underline{5}, \quad \{3\} \subset \underline{5}, \quad \{2,3\} \subset \underline{5}, \quad 5 \notin \underline{3}, \quad \underline{5} \not\subset \underline{3}.$$

Die Elemente von $A = \{\underline{1}, \underline{2}, \underline{3}\}$ sind selbst Mengen, also

$$\underline{2} \in A, \quad 2 \notin A, \quad \{\underline{2}, \underline{3}\} \subset A, \quad \{2,3\} \not\subset A, \quad \{2,3\} \notin A.$$

Aufgabe 9.6 Bestimmen Sie alle Teilmengen von $\varnothing$, $\underline{1}$, $\underline{2}$.

Beispiel. Wir beweisen die Aussage $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)$.

2) rechte Menge $\subset$ linke Menge (die andere Richtung wurde in der Vorlesung gezeigt). Sei $x \in (A \cup B) \cap (B \cup C)$. Dies ist äquivalent zu $x \in A \cup B$ und $x \in B \cup C$ bzw. ($x \in A$ oder $x \in B$) und ($x \in A$ oder $x \in C$). Also auf jeden Fall ist $x \in A$ und in B oder C. Somit $x \in A \cup (B \cap C)$. $\square$

Aufgabe 9.7 Beweisen Sie die De Morganschen Regeln:

a) $U \setminus (A \cap B) = (U \setminus A) \cup (U \setminus B)$,

b) $U \setminus (A \cup B) = (U \setminus A) \cap (U \setminus B)$.

Aufgabe 9.8 Beweisen Sie (hier sind A, B, C beliebige Mengen):

a) $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C)$,

b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,

c) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,